Numerikus módszerek 1.

8. előadás: Iterációs módszerek LER megoldására

Lócsi Levente

ELTE IK

Tartalomjegyzék

Tartalomjegyzék

Tekintsük a következő leképezést:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x) = Bx + c,$$

ahol $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ és $c \in \mathbb{R}^n$,

majd az ennek segítségével megadott következő (vektor)sorozatot:

$x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ (tetszőleges), $\qquad x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$

Mit tud ez a sorozat / iteráció? Konvergens? Milyen értelemben?
Ha konvergens, mi a határértéke?

Definíció: vektorsorozat konvergenciája, határértéke

Az $\left(x^{(k)} | k \in \mathbb{N}\right) \subset \mathbb{R}^m$ vektorsorozat *konvergens* a $\|.\|$ vektornormában, ha

$$\exists a \in \mathbb{R}^m : \forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N : \left\|x^{(n)} - a\right\| < \varepsilon.$$

Ekkor a sorozat *határértéke* a, azaz $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a$.

Példa

Számítsuk ki a következő sorozat első néhány elemét!

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(k+1)} := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x^{(k)} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

$$x^{(0)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$x^{(1)} = B \cdot x^{(0)} + c = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = B \cdot x^{(1)} + c = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 35 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 48 \\ -14 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = B \cdot x^{(2)} + c = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 48 \\ -14 \end{pmatrix} + \frac{1}{125}\begin{pmatrix} 175 \\ -25 \end{pmatrix} = \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.4 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1.92 \\ -0.56 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.056 \\ -0.808 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2.061 \\ -0.934 \end{pmatrix}, \dots \quad \longrightarrow \quad ?$$

Mi köze ennek lineáris egyenletrendszerekhez?

Ha $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$, akkor $x^* = \varphi(x^*)$, avagy $x^* = B \cdot x^* + c$.

Vagyis $(I - B) \cdot x^* = c$, azaz x^* az $(I - B) \cdot x = c$ LER megoldása.

Alkalmazzuk az $A = I - B,\ b = c,\ Ax = b$ jelölést...

Példa

Mely lineáris egyenletrendszer megoldásához konvergál az iménti sorozat?

Megoldás

$$x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c, \quad B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$A = I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = c = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = b, \quad \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Általában:

$$Ax = b, \qquad A = P + Q, \qquad (P+Q)x = b,$$

átrendezve:

$$Px = -Qx + b \quad \Longleftrightarrow \quad x = -P^{-1}Qx + P^{-1}b,$$

iterációs alakban írva:

$$x^{(k+1)} = -P^{-1}Q \cdot x^{(k)} + P^{-1}b.$$

Megj.: $B := -P^{-1}Q$ az iteráció mátrixa, avagy „átmenetmátrix”, illetve $c := P^{-1}b$ az iteráció vektora

Definíció: fixpont

Az $x^* \in \mathbb{R}^n$ pontot a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha $x^* = \varphi(x^*)$.

Definíció: kontrakció

A $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ leképezés *kontrakció*, ha $\exists q \in [0, 1)$, hogy

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq q \cdot \|x - y\|, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Megj.:

- kontrakció $\approx$ összehúzás
- q: kontrakciós együttható

Állítás

Ha $\|B\| < 1$, akkor a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = B \cdot x + c$ leképezés kontrakció. (Az $\mathbb{R}^n$-en alkalmazott vektornormához illeszkedő mátrixnormát tekintve.)

Biz.:

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|(Bx + c) - (By + c)\| =$$
$$= \|Bx - By\| = \|B(x - y)\| \leq \underbrace{\|B\|}_{:=q<1} \cdot \|x - y\| \, .$$

Tétel: Banach-féle fixponttétel $\mathbb{R}^n$-re

Ha a $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvény kontrakció $\mathbb{R}^n$-en q kontrakciós együtthatóval, akkor

1. $\exists x^* \in \mathbb{R}^n : x^* = \varphi(x^*)$, azaz létezik fixpont,
2. a fixpont egyértelmű,
3. $\forall x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ esetén az $x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}),\ k \in \mathbb{N}_0$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$,
4. és a következő hibabecslések teljesülnek:
   - $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \leq q^k \cdot \left\|x^{(0)} - x^*\right\|$,
   - $\left\|x^{(k)} - x^*\right\| \leq \dfrac{q^k}{1-q} \cdot \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|$.

Biz.: Táblán. Beláttuk. $\square$

Következmény: iteráció konvergenciájának elégséges feltétele

Ha $\|B\| < 1$, az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció konvergens.

Megj.: Attól még lehet konvergens, ha $\|B\| \geq 1$.
(Nem szükséges feltétel.)

Lemma: spektrálsugár és természetes normák kapcsolata

$$\varrho(B) = \inf \{ \|B\| \ : \ \|.\| \ \text{természetes mátrixnorma} \},$$

azaz $\forall \varepsilon > 0 : \exists \, \|.\| \ \text{indukált} : \|B\| < \varrho(B) + \varepsilon.$

Biz.: Nélkül.

Tétel: iteráció konvergenciájának ekvivalens feltétele

Az $x^{(k+1)} = B \cdot x^{(k)} + c$ iteráció akkor és csak akkor konvergens, ha

$$\varrho(B) < 1.$$

Biz.:

- $\Leftarrow$: Az előző Lemma alapján.
- $\Rightarrow$: Indirekt tegyük fel, hogy $\varrho(B) \geq 1$, azaz $\exists \lambda \geq 1$ sajátérték, és legyen $x^{(0)}$ olyan, hogy $x^{(0)} - x^*(\neq 0)$ a B λ-hoz tartozó sajátvektora legyen.

Ekkor:

$$B(x^{(0)} - x^*) = \lambda(x^{(0)} - x^*)$$

$$x^{(k)} - x^* = (Bx^{(k-1)} + c) - (Bx^* + c) = B(x^{(k-1)} - x^*) =$$

$$= B^k(x^{(0)} - x^*) = \lambda^k(x^{(0)} - x^*)$$

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\| = |\lambda|^k \cdot \underbrace{\left\|x^{(0)} - x^*\right\|}_{\text{konst.}} \nrightarrow 0 \quad (k \to \infty)$$

$\square$

Példa

Mit állíthatunk a következő iteráció konvergenciájáról?

$$x^{(k+1)} := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x^{(k)} + \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 32.4 \\ \sqrt{\pi} \end{pmatrix}, \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Tekintsük az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszert, majd írjuk fel annak mátrixát

$$A = L + D + U$$

alakban, ahol L alsó háromszögmátrix, D diagonális mátrix, U pedig felső háromszögmátrix, méghozzá

- $l_{i,j} = a_{i,j} \quad (i > j), \quad l_{i,j} = 0 \quad (i \leq j)$,
- $d_{i,j} = a_{i,j} \quad (i = j), \quad d_{i,j} = 0 \quad (i \neq j)$,
- $u_{i,j} = a_{i,j} \quad (i < j), \quad u_{i,j} = 0 \quad (i \geq j)$.

Példa $A = L + D + U$ felbontásra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megj.: Semmi köze az LU-felbontáshoz.

Átalakítás:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ (L+D+U)x &= b \\ Dx &= -(L+U)x + b \\ x &= -D^{-1}(L+U)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: Jacobi-iteráció

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B_J} \cdot x^{(k)} + \underbrace{D^{-1}b}_{c_J} = B_J \cdot x^{(k)} + c_J$$

Eml.:

$$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U) \cdot x^{(k)} + D^{-1}b$$

Írjuk fel koordinátánként (komponensenként)!

Állítás: a Jacobi-iteráció komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{i,i}} \left(\sum_{j=1,\ j\neq i}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Biz.: Házi feladat meggondolni. Egyszerű. $\square$

Példa

Konvergens-e minden $x^{(0)}$ esetén a következő mátrixú egyenletrendszerre felírt Jacobi-iteráció?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_J = -D^{-1}(L+U) = -I(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\|B_J\|_1 = 4 \not< 1, \quad \|B_J\|_\infty = 4 \not< 1$$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4 - 4 + 2\lambda + 2\lambda - 4\lambda =$$

$$= -\lambda^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{1,2,3} = 0 \Rightarrow \varrho(B_J) = 0 < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

Definíció: szigorúan diagonálisan domináns mátrixok

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix *szigorúan diagonálisan domináns* a soraira nézve, ha

$$|a_{i,i}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{i,j}| \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Tétel

Ha A szig. diag. dom. a soraira, akkor az $Ax = b$ LER-re felírt Jacobi-iteráció konvergens bármely $x^{(0)}$ esetén.

Biz.:

$$\|B_J\|_\infty = \left\|-D^{-1}(L+U)\right\|_\infty = \max_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{|a_{i,i}|} \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |a_{i,j}|}_{<1} < 1. \qquad \square$$

Átalakítás:

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
(L + D + U)x &= b \\
(L + D)x &= -Ux + b \\
x &= -(L + D)^{-1}Ux + (L + D)^{-1}b
\end{aligned}
$$

Ezek alapján az iteráció a következő.

Definíció: Gauss–Seidel-iteráció

$$x^{(k+1)} = \underbrace{-(L + D)^{-1}U}_{B_S} \cdot x^{(k)} + \underbrace{(L + D)^{-1}b}_{c_S} = B_S \cdot x^{(k)} + c_S$$

Eml.:

$$x^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}U \cdot x^{(k)} + (L+D)^{-1}b$$

Írjuk fel koordinátánként! (Kiderül, hogy „helyben” számolható.)

Állítás: a Gauss–Seidel-iteráció komponensenkénti alakja

$$x_i^{(k+1)} = \frac{-1}{a_{i,i}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k)} - b_i \right)$$

Biz.: Alakítsunk át, majd gondoljunk bele a mátrixszorzásba.

$$\begin{aligned} (L+D)x^{(k+1)} &= -Ux^{(k)} + b \\ Dx^{(k+1)} &= -Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)} + b \\ x^{(k+1)} &= -D^{-1}(Lx^{(k+1)} + Ux^{(k)} - b) \quad \square \end{aligned}$$

Tétel

Ha A szig. diag. dom. a soraira, akkor az $Ax = b$ LER-re felírt Gauss–Seidel-iterációra

$$\|B_S\|_\infty \leq \|B_J\|_\infty < 1$$

teljesül, tehát az konvergens bármely $x^{(0)}$ esetén.

Biz.: Nélkül.

Tétel

Ha A szimmetrikus és pozitív definit, akkor a Gauss–Seidel-iteráció konvergens.

Biz.: Nélkül.

Példa

Konvergens-e minden $x^{(0)}$ esetén a következő mátrixra – ugyanaz, mint az imént – felírt Gauss–Seidel-iteráció?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Megoldás

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_S = -(L+D)^{-1}U = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\|B_S\|_1 = 12 \not< 1, \quad \|B_S\|_\infty = 14 \not< 1$$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 8 & -6-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\Big[(2-\lambda)(-6-\lambda)+8\Big] =$$

$$-\lambda\left[\lambda^2 + 4\lambda - 4\right] = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_{2,3} = \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow\ \varrho(B_J) = 2 + 2\sqrt{2} \not< 1\ \Rightarrow\ \text{nem konv.}$$

Példák Matlab-ban

1. Példa iterációra, konvergens vektorsorozat számítására.
2. Konvergens és divergens iterációk tulajdonságainak szemléltetése $n = 2, 3$ dimenzióban.